Método Axiomático e Teorias Formais

#12

Um pouco de metamatemática

Metamatemática

A *metamatemática*, informalmente falando, é o estudo matemático das teorias formais, enquanto um objeto de estudo em si mesmo.

Sendo assim, os chamados metateoremas, são, portanto, teoremas a respeito das teorias formais formulados na linguagem da metamatemática.

Neste vídeo, apresentarei brevemente algumas definições e resultados metamatemáticos sobre as teorias formais de primeira ordem (cuja definição vimos no vídeo 08).

Consistência

Intuitivamente falando, uma teoria formal é consistente se ela, ao demonstrar A, não demonstra $\neg A$.

Por exemplo, acharíamos estranho se uma teoria formal da aritmética demonstrasse que $1 + 1 = 2$ e demonstrasse também que $1 + 1 \neq 2$ (se isso acontecesse, teríamos uma teoria inconsistente).

Há duas definições para a consistência de uma teoria formal: uma sintática e outra semântica.

Consistência

Definição 1 – Uma teoria de primeira ordem $\mathbb{K}$ é *sintaticamente consistente* se, e somente se, não existe fórmula A dessa teoria tal que A e $(\neg A)$ sejam ambas teoremas de $\mathbb{K}$.

Definição 2 – Uma teoria de primeira ordem $\mathbb{K}$ é *semanticamente consistente* se, e somente se, admite modelo.

Lembrete: Um modelo de uma teoria de primeira ordem é uma interpretação para a sua linguagem na qual todos os axiomas dessa teoria são verdadeiros.

Completude

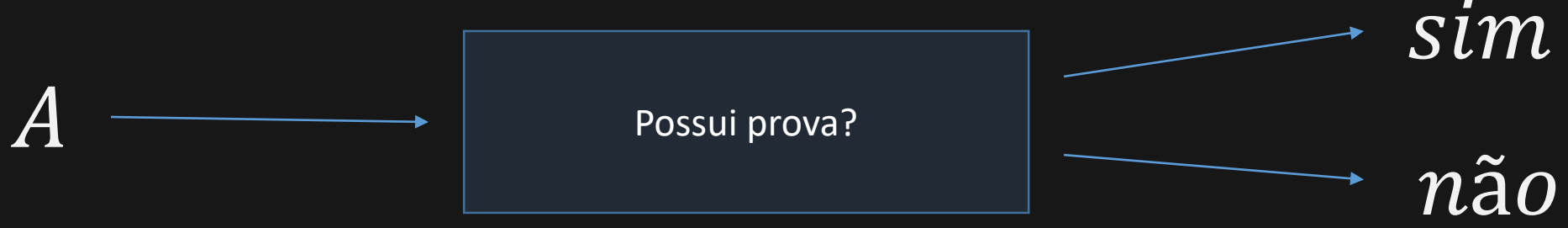
A completude de uma teoria formal está, simplificadamente falando, associada ao fato de que, para toda fórmula fechada A dessa teoria, é possível prová-la (provar A) ou refutá-la (provar $\neg A$) .

Definição 3: Uma teoria de primeira ordem $\mathbb{K}$ é *completa* se, e somente se, para toda fórmula fechada A, ou A é teorema de $\mathbb{K}$ ou $(\neg A)$ é teorema de $\mathbb{K}$.

Decidibilidade

A decidibilidade de uma teoria formal envolve a noção de procedimento efetivo, que pode ser formalizado, por exemplo, por meio das máquinas de Turing (veja nossa outra série lá no moodle).

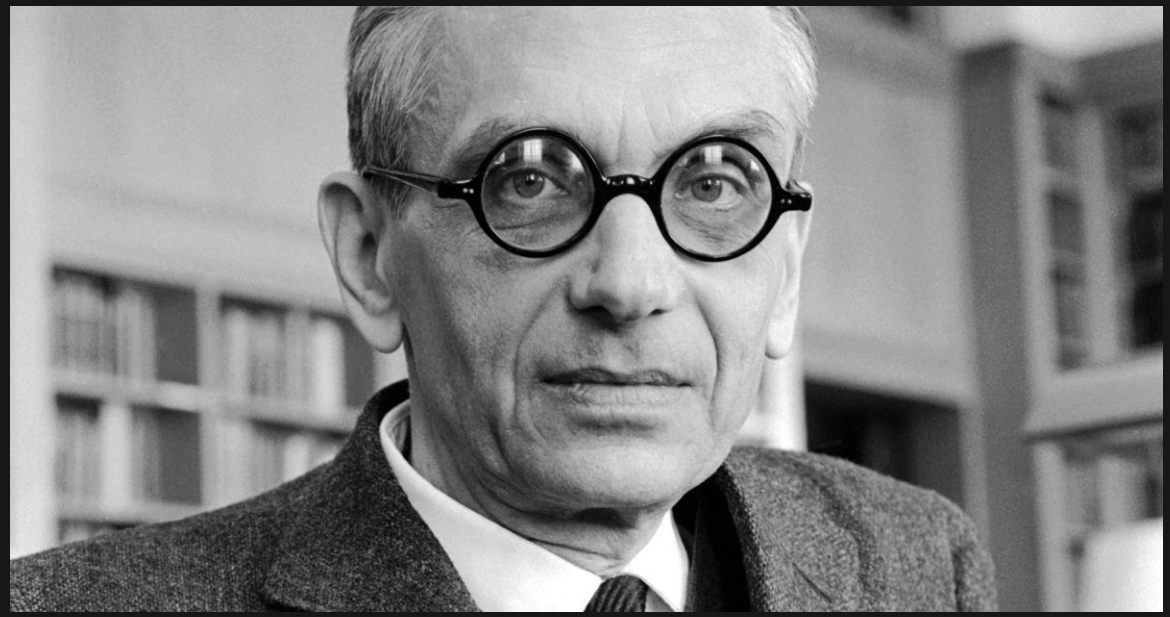
Definição 4: Uma teoria de primeira ordem $\mathbb{K}$ é *decidível* se, e somente se, existe um procedimento efetivo que, tomando como input uma fórmula A, consegue decidir se essa fórmula possui ou não prova em $\mathbb{K}$.



Alguns resultados importantes

Gödel demonstrou em 1929 que a lógica de primeira ordem é completa.

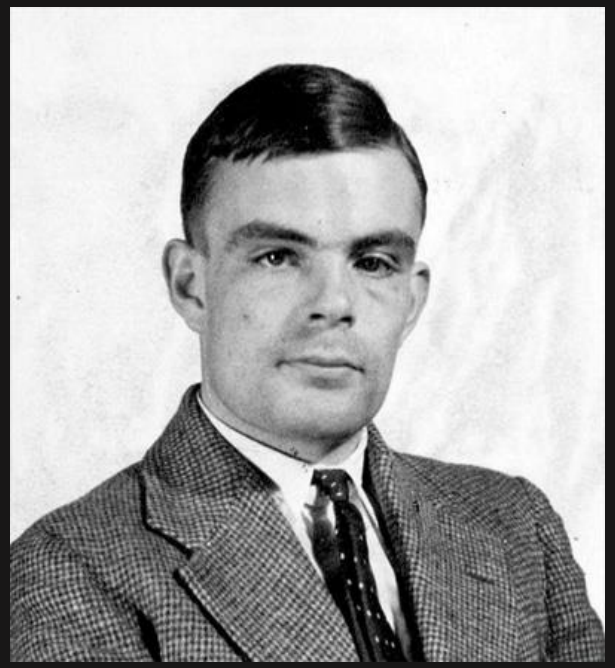
Toda fórmula logicamente válida (isto é, que é verdadeira em toda interpretação), possui prova na lógica de primeira ordem.



Kurt Gödel (1906-1978)

Alguns resultados importantes

Alonzo Church
(1903-1995)



Alan Turing (1912-1954)

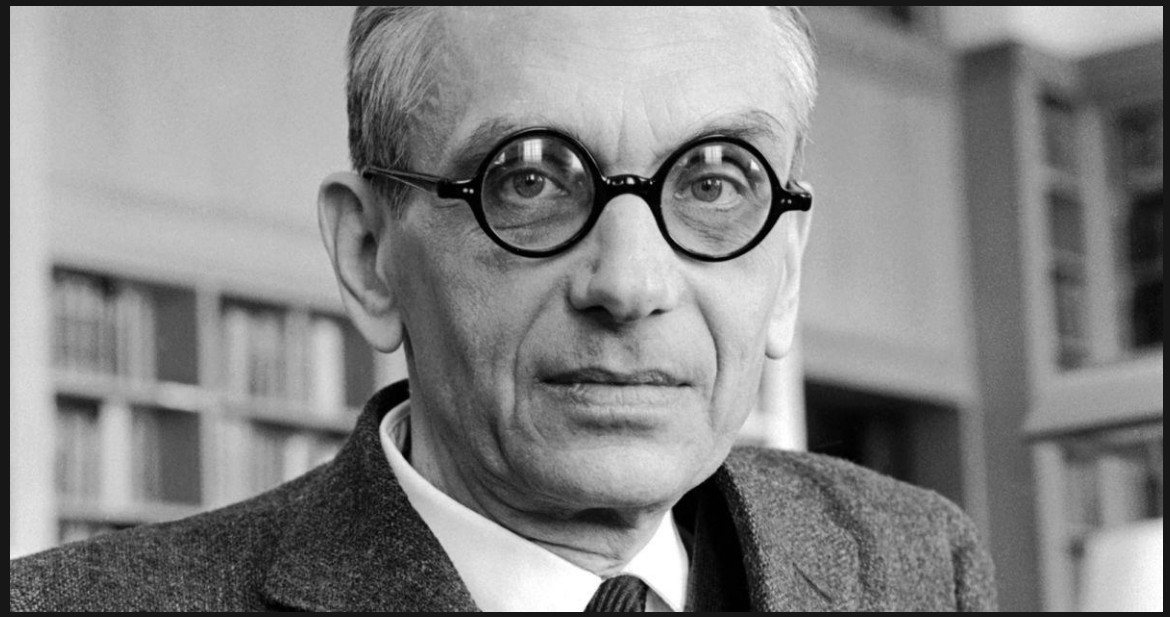
Alonzo Church e Alan Turing demonstraram, de forma independente em 1936, que a lógica de primeira ordem é indecidível.

Alguns resultados importantes

Gödel demonstrou em 1931 que certas teorias formais* ou são consistentes ou são completas.

*Tais teorias devem satisfazer algumas condições, como, por exemplo

- Seus axiomas podem ser listados mecanicamente;
- serem capazes de formalizar a aritmética.



Kurt Gödel (1906-1978)

Outros resultados

- A lógica proposicional é consistente, completa e decidível.
- Os axiomas lógicos de um teoria de primeira ordem são verdadeiros em qualquer interpretação.
- Todo teorema da lógica de primeira ordem é logicamente válido.
- A teoria formal para a lógica de primeira ordem é sintaticamente consistente.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br